vi è quella di permettere di stabilire quando una matrice è invertibile, cioè quando, data una matrice A, esiste una matrice B tale che $AB = \mathrm{id} = BA$.

La definizione stessa di determinante e la dimostrazione delle molte, rilevanti proprietà del determinante sono tecniche e abbastanza noiose. Allora daremo, come definizione di determinante, un algoritmo per calcolarlo e un elenco delle proprietà assolutamente da non ignorare. Raggrupperemo in una parte successiva le dimostrazioni.

Definizione 3.5.1 *Sia A una matrice* quadrata *(N.B. Il determinante è definito solo per matrici quadrate).*
1) Se l'ordine di A è 1, cioè A è costituita da un solo elemento $A = (a)$, $a \in \mathbb{R}$, allora, per definizione, $\det A = a$.
2) Se A ha ordine $n > 1$, allora $\det A$ *si calcola secondo la seguente formula ricorsiva:*

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} + \cdots + \\ &\quad +(-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove con A_{ij} si indica la matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, detta complemento algebrico *dell'elemento a_{ij}.*

La formula utilizzata per questa definizione viene detto *sviluppo di Laplace* del determinante secondo la prima riga.

Sia A di ordine 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Applicando la definizione:

$$\det A = a \det A_{11} - b \det A_{12} \,.$$

Ma $A_{11} = (d)$ e $A_{12} = (c)$ e per il punto 1) della definizione si ha:

$$\det A = ad - bc \,.$$

Esempio 3.5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 - (-2) = 3$.

Ormai risulta chiaro che, se ho una matrice di ordine n, sviluppando secondo Laplace, cioè secondo la formula (3.5), ho una somma con n determinanti di matrici di ordine $n-1$ che, a loro volta, vanno sviluppati allo stesso modo, per un totale di $n(n-1)$ determinanti di matrici di ordine $n-2$ e così via fino ad arrivare a dover calcolare $n!$ determinanti di matrici di ordine 1 per le quali si applica la prima parte della definizione del determinante.

Esempio 3.5.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det A &= 3\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}2\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3(-3) - (-2) + 2\cdot 1 = -5. \end{aligned}$$

Principali proprietà del determinante

1) Lo sviluppo di Laplace del determinante può essere fatto secondo una qualsiasi riga o colonna, non solo la prima. Se scelgo la i-esima riga, la formula diventa:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2} + \cdots + \\ &\quad +(-1)^{i+k}a_{ik}\det A_{ik} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det A_{ik}\,. \end{aligned}$$

Se scegliessi la j-esima colonna, farei variare da 1 a n l'indice di riga e terrei fisso j come indice di colonna:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\det A_{kj}\,.$$

Il risultato non dipende dalla scelta della riga o della colonna rispetto a cui faccio lo sviluppo.

2) Se una matrice ha una riga (o una colonna) fatta tutta di zeri, il suo determinante è zero.

3) Se una matrice A' è ottenuta scambiando tra loro di posto due righe (o due colonne) della matrice A, allora $\det A' = -\det A$.

4) Se una matrice ha due righe (o due colonne) uguali, non necessariamente adiacenti, allora il suo determinante è zero.

5) Se A' è una matrice che si ottiene moltiplicando per uno scalare λ tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) della matrice A, allora:

$$\det A' = \lambda \det A\,.$$

6) Se λ è uno scalare, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, dove n è l'ordine di A.

7) Siano R_1 e R_2 due righe (risp. due colonne), cioè due matrici di tipo $1 \times n$ (risp. $n \times 1$). Sia A una matrice di ordine n che abbia come i-esima riga la riga $R_1 + R_2$ e siano A_1 e A_2 due matrici di ordine n aventi come i-esima riga rispettivamente R_1 e R_2 e tutte le altre righe uguali alle righe di A e nella medesima posizione. Allora:

$$\det A = \det A_1 + \det A_2\,.$$

8) Se si somma ad una riga della matrice A (risp. ad una colonna) una combinazione lineare delle *altre* righe (risp. colonne) di A, il determinante della matrice così ottenuta è uguale a $\det A$.

Ricordiamo che ad esempio le colonne sono matrici di tipo $n \times 1$ e quindi di esse si possono considerare le combinazioni lineari, secondo la Definizione 3.2.6.

9) Se I_n è la matrice identità di ordine n, $\det I_n = 1$, indipendentemente da n.

10) Il determinate di una matrice è uguale a quello della sua trasposta:

$$\det({}^tA) = \det A\,.$$

Queste proprietà vanno tenute sempre presenti, perché possono facilitare enormemente il calcolo dei determinanti. Valga come esempio, il suggerimento di sviluppare il determinante secondo la riga o la colonna che contiene il maggior numero di zeri, poiché il risultato, in base alla proprietà 1) è lo stesso, ma ogni zero risparmia il calcolo di un determinante di ordine $n-1$.

Osserviamo che nessuna indicazione viene data per la somma di matrici; tra $\det(A+B)$, $\det A$ e $\det B$ non vi è nessuna relazione significativamente utilizzabile. Vi è invece una importante relazione per il determinante del prodotto tra matrici.

Teorema 3.5.4 (Binet) *Il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti dei fattori; in breve:*

$$\det(A \cdot B) = \det A \det B\,. \tag{3.6}$$

Esistono molte dimostrazioni di questo teorema, spesso tecniche e poco istruttive. Ne daremo daremo una un po' articolata ma che ci sembra utile. Premettiamo la seguente:

Osservazione 3.5.5 *Il determinante di una matrice triangolare si calcola facendo il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Basta infatti sviluppare il determinante secondo la prima colonna e ripetere il procedimento per il complemento algebrico che è ancora triangolare.*

Se A e B sono triangolari, per l'Osservazione 3.3.8 sul prodotto di matrici triangolari, l'i-esimo elemento sulla diagonale principale del prodotto C è uguale al prodotto degli i-esimi elementi delle diagonali principali di A e B rispettivamente: $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. Quindi, usando l'Osservazione 3.5.5, abbiamo che:

$$\det(A \cdot B) = a_{11}b_{11} \cdots a_{nn}b_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}b_{11} \cdots b_{nn} = \det A \det B\,.$$

Nella sezione 3.4 (Proposizione 3.4.8) abbiamo visto che è possibile trasformare una matrice in una triangolare tramite trasformazioni elementari di riga del secondo tipo. Si noti che, per la proprietà 8) del determinante, queste trasformazioni non alterano il valore del determinante (a differenza di quelle del primo tipo, che lo cambiano di segno, e di quelle del terzo tipo, che hanno il risultato di moltiplicarlo per uno scalare).

Adepereremo questo risultato per dimostrare il teorema di Binet nel caso di matrice generiche (non necessariamente triangolari).

Dim. (del Teorema di Binet). Date A e B, siano $T_R(A)$ e $T_C(B)$ le matrici equivalenti per righe e risp. per colonne ad A e B che siano triangolari e ottenute con trasformazioni del secondo tipo, quindi con lo stesso determinante di A e B, rispettivamente. Allora:

$$\det(AB) = \det(T_C(T_R(A \cdot B))) = \det(T_C(T_R(A) \cdot B)) = \det(T_R(A) \cdot T_C(B))\,.$$

Questo applicando per la prima uguaglianza le proprietà del determinante e delle trasformazioni elementari, e per le altre la Proposizione 3.4.7. Poiché $T_R(A)$ e $T_C(B)$ sono triangolari, per l'Osservazione 3.3.8,

$$\det(T_R(A) \cdot T_C(B)) = \det(T_R(A)) \det(T_C(B))\,.$$

Infine, poiché $\det(T_R(A)) = \det A$ e $\det(T_C(B)) = \det B$, si ha la tesi: $\det(AB) = \det A \det B$. □

Dim. (delle 10 proprietà del determinante).
1) Dimostriamolo per induzione sull'ordine della matrice A. Se A ha ordine 1, non vi è scelta, la proprietà vale. Supponiamo che valga per ogni intero minore di n e mostriamo che vale per n. Lo sviluppo del determinante secondo la i-esima riga è dato da:

$$(-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} .$$

A questo punto sviluppo il determinante di ciascun A_{ik} secondo la prima riga e ottengo una sommatoria su h e k di termini del tipo:

$$(-1)^{i+k+1+h} a_{ik} a_{1h} \det(A_{ik})_{1h}$$

con $i \neq 1$ e $h \neq k$ e dove $(A_{ik})_{1h}$ è la matrice che si ottiene da A cancellando la prima e la i-esima riga e la h-esima e la k-esima colonna.

Se sviluppiamo il $\det A$ secondo la definizione, cioè la prima riga, si ha:

$$a_{11} \det A_{11} + \cdots + (-1)^{1+h} a_{1h} \det A_{1h} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} .$$

Se sviluppiamo il determinante di ciascun A_{1h} secondo la sua $(i-1)$-esima riga che corrisponde alla i-esima riga di A, per ipotesi induttiva il risultato non cambia, ma formalmente otteniamo una somma di termini del tipo:

$$(-1)^{i+k+1+h} a_{ik} a_{1h} \det(A_{1h})_{ik}$$

con $i \neq 1$ e $h \neq k$ e dove $(A_{1h})_{ik}$ è la matrice che si ottiene da A cancellando la prima e la i-esima riga e la h-esima e la k-esima colonna e dove i termini a_{ik} sono riferiti ad A, nel senso che il termine che si trova al posto $(i-1, k)$ di A_{1h} è proprio il termine che si trova al posto (i, k) di A, se $k < h$, e al posto $(i, k+1)$, se $k \geq h$.

Con analogo ragionamento, cioè prima sviluppando per una colonna e poi per una riga, quindi sviluppando per una riga e poi per una colonna, sempre per induzione, si dimostra che il calcolo del determinante sviluppato secondo una colonna è lo stesso che sviluppato secondo una riga.
2) Ovvio, a questo punto, perché sviluppando secondo la riga, o colonna, tutta di zeri, l'espressione che si ottiene è zero.
3) Supponiamo che A' sia la matrice tale che la i-esima riga di A' è uguale

alla $(i+1)$-esima riga di A e la $(i+1)$-esima riga di A' è uguale alla i-esima riga di A, cioè A' è la matrice che si ottiene da A scambiando due righe adiacenti.

Sviluppando $\det A$ secondo la i-esima riga si ha:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} .$$

Sviluppando $\det A'$ secondo la $(i+1)$-esima riga si ha:

$$\det A' = (-1)^{(i+1)+1} a'_{(i+1)1} \det A'_{(i+1)1} + \cdots + (-1)^{(i+1)+n} a'_{(i+1)n} \det A'_{(i+1)n} .$$

Ma, poiché $a'_{(i+1)k} = a_{ik}$ e $A'_{(i+1)k} = A_{ik}$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, allora

$$\det A' = (-1) \left((-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \right) = -\det A .$$

Se le due righe non sono adiacenti, la matrice che le ha scambiate si ottiene da A mediante una successione di matrici A_i ognuna delle quali si ottiene dalla precedente scambiando due righe adiacenti, nel modo seguente. Supponiamo che voglia scambiare la riga h con la riga $h+k$, cioè tra le due righe da scambiare ve ne sono $k-1$. Allora A_1 è la matrice che si ottiene da A scambiando la riga h con la riga $h+1$, poi scambio la riga $h+1$ con la $h+2$ e dopo $k-1$ scambi tra righe adiacenti ho che la vecchia riga h è adiacente alla riga $h+k$. Le scambio, cosicché adesso la vecchia riga $h+k$ precede la riga h, e dopo altri $k-1$ scambi porto la riga $h+k$ ad occupare la h-esima posizione. In totale la matrice A' è stata ottenuta da A dopo $2(k-1)+1$ scambi. Siccome ad ogni scambio tra righe adiacenti il determinante cambia segno, si ha che:

$$\det A' = (-1)^{2k-1} \det A = -\det A .$$

Stesso discorso per lo scambio di due colonne.
4) Se A ha due colonne uguali e se A' è la matrice che ha le due colonne scambiate, $A' = A$. Ma anche $\det A' = -\det A$. Quindi $\det A = \det A' = -\det A$, che implica $\det A = 0$.
5) La dimostrazione è immediata. Basta sviluppare $\det A'$ secondo la riga o la colonna moltiplicata per λ, raccogliere λ ed accorgersi che ciò che rimane è $\det A$.
6) Applicando n volte il risultato precedente, si ottiene la relazione cercata.
7) Sviluppando $\det A$ secondo la i-esima riga si ha:

$$(-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} .$$

Ma $a_{ik} = (a_1)_{ik} + (a_2)_{ik}$, dove $(a_j)_{ik}$ è il corrispondente elemento di A_j, con $j = 1, 2$. Inoltre è facile convincersi del fatto che $A_{ik} = (A_j)_{ik}$, dove $(A_j)_{ik}$ è il corrispondente complemento algebrico di A_j. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}
&\det A = \\
&= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \\
&= (-1)^{i+1}((a_1)_{i1} + (a_2)_{i1}) \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n}((a_1)_{in} + (a_2)_{in}) \det A_{in} \\
&= (-1)^{i+1}(a_1)_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n}(a_1)_{in} \det A_{in} + \\
&\quad +(-1)^{i+1}(a_2)_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n}(a_2)_{in} \det A_{in} = \det A_1 + \det A_2 .
\end{aligned}$$

8) Se alla i-esima riga di A sommiamo una combinazione lineare delle altre righe con coefficienti λ_i, applicando la 5) e la 7) abbiamo che il determinante della matrice A' così ottenuta è uguale al determinante di A più una combinazione lineare con gli stessi coefficienti λ_i di determinanti di matrici aventi due righe uguali, e quindi tutti nulli.

Procedimento analogo per le combinazioni lineari di colonne.

9) Per induzione.

$$I_1 = (1), \quad \det(1) = 1 .$$

Supponiamo che $\det I_{n-1} = 1$. Sviluppando $\det I_n$ secondo la prima riga si ha che:

$$\det I_n = 1 \cdot \det I_{n-1} = 1 .$$

10) Segue subito dalla 1). □

3.6 Invertibilità di una matrice e metodo di Gauss

A questo punto vogliamo affrontare il seguente problema:

Sappiamo che l'insieme $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali è un anello (non commutativo) con identità, con le operazioni di somma e di prodotto riga per colonna. È esso un campo? Ossia, data una matrice non nulla A, esiste una matrice B tale che sia $A \cdot B = B \cdot A = I_n$? Il teorema di Binet ci dà subito la risposta. No, se $n > 1$. Infatti necessariamente, se $A \cdot B = I_n$, $\det A \det B = \det(AB) = \det I_n = 1$. Quindi, se

$\det A = 0$ ciò è impossibile. Ed esistono molte matrici $A \neq 0$ tali che, però, $\det A = 0$. Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo allora che, *condizione necessaria affinché una matrice quadrata A ammetta la matrice inversa, è che* $\det A \neq 0$. In realtà tale condizione è anche sufficiente.

Proposizione 3.6.1 *Una matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile, cioè esiste B (dello stesso ordine) tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dim. Il "solo se" lo abbiamo già visto poco sopra. Dimostreremo che se $\det A \neq 0$, allora esiste la matrice inversa, indicata d'ora in poi con A^{-1}, costruendola esplicitamente.

Sia A_{ij} il complemento algebrico dell'elemento di posto i, j di A. Sia B la matrice tale che il suo elemento b_{ij} sia così definito:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A} .$$

Osserviamo che qui interviene l'ipotesi che $\det A \neq 0$.

Verifichiamo che ${}^tB = A^{-1}$, cioè ${}^tB \cdot A = A \cdot {}^tB = I_n$.

Moltiplichiamo la i-esima riga di ${}^tB$, quindi la i-esima colonna di B, per la j-esima colonna di A e vediamo che tale prodotto è zero se $i \neq j$ e vale 1 se $i = j$.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{1j}b_{1i} + \cdots + a_{kj}b_{ki} + \cdots + a_{nj}b_{ni} \\ &= \frac{(-1)^{1+i}a_{1j} \det A_{1i} + \cdots + (-1)^{k+i}a_{kj} \det A_{ki} + \cdots + (-1)^{n+i}a_{nj} \det A_{ni}}{\det A} . \end{aligned}$$

Se $i = j$, il numeratore è lo sviluppo di Laplace di $\det A$ secondo la i-esima colonna. Pertanto si ha che:

$$c_{ii} = \frac{1}{\det A} \det A = 1 .$$

Se $i \neq j$, l'espressione tra parentesi quadra è lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice A', che ha tutte le colonne uguali a quelle di A tranne la sua i-esima che coincide non con la i-esima di A bensì con la j-esima colonna di A. Pertanto A' è una matrice che ha due colonne uguali, la i-esima e la j-esima, entrambe uguali alla i-esima colonna di A, e quindi $\det A = 0$. Perciò, se $i \neq j$, $c_{ij} = \frac{1}{\det A} \det A' = 0$. Analogo ragionamento posso seguire se moltiplico la i-esima riga di A per la j-esima colonna di ${}^tB$ che sarebbe la j-esima riga di B. □

Esempio 3.6.2 *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = \frac{3}{2} \neq 0$ *e quindi* A *è invertibile.*

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= (-1)^2 \tfrac{\det A_{11}}{\det A} = \tfrac{2}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{3}\,, \\
b_{12} &= (-1)^3 \tfrac{\det A_{12}}{\det A} = -\tfrac{2}{3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\,, \\
b_{13} &= (-1)^4 \tfrac{\det A_{13}}{\det A} = \tfrac{2}{3} \det A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3}\,, \\
b_{21} &= (-1)^3 \tfrac{\det A_{21}}{\det A} = -\tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{2}{3}\,, \\
b_{22} &= (-1)^4 \tfrac{\det A_{22}}{\det A} = \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3}\,, \\
b_{23} &= (-1)^5 \tfrac{\det A_{23}}{\det A} = -\tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{4}{3}\,, \\
b_{31} &= (-1)^4 \tfrac{\det A_{31}}{\det A} = \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{3}\,, \\
b_{32} &= (-1)^5 \tfrac{\det A_{32}}{\det A} = -\tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{2}{3}\,, \\
b_{33} &= (-1)^6 \tfrac{\det A_{33}}{\det A} = \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{3}\,, \\
B &= (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = {}^tB = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si verifichi che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Osservazione 3.6.3 *1) La matrice inversa di* A *se esiste, è unica. Infatti, siano* B *e* C *tali che* $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ *e* $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. *Allora:*

$$B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot C = I_n \cdot C = C\,.$$

2) Se A *e* B *sono invertibili, anche* $A \cdot B$ *lo è e inoltre:*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}\,.$$

Cioè l'inversa del prodotto è uguale al prodotto delle inverse ma in ordine inverso. *Infatti* $A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n$.

Osserviamo che abbiamo sempre utilizzato la proprietà associativa del prodotto riga per colonna.

3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. *Cioè l'inversa della trasposta è la trasposta dell'inversa. Infatti:* ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^tA^{-1} \cdot A = {}^tI_n = I_n$.

Si può quindi scrivere senza ambiguità ${}^tA^{-1}$.

Metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa. Il seguente metodo fornisce un criterio per stabilire se una matrice quadrata è invertibile e, in caso affermativo, permette di calcolare la matrice inversa.

Data una matrice quadrata A, consideriamo la matrice M di tipo $n \times 2n$ le cui colonne sono ordinatamente quelle di A e quelle della matrice identità di ordine n, cioè M è la matrice ottenuta da A affiancandole la matrice I_n. Scriviamo:

$$M = (A, I_n)\,.$$

Per la Proposizione 3.4.8, possiamo ridurre la matrice A ad una matrice triangolare A' con trasformazioni elementari di riga. Si noti che A è invertibile se e solo se lo è A'. D'altra parte A' è invertibile, cioè $\det A' \neq 0$, se e solo se gli elementi sulla sua diagonale sono tutti non nulli.

Se questo non avviene abbiamo concluso che A non è invertibile. In caso contrario possiamo procedere al calcolo dell'inversa di A. Osserviamo che, moltiplicando ogni riga per un multiplo opportuno, possiamo allora supporre che tutti gli elementi siano uguali a uno. Possiamo poi, sempre con trasformazioni elementari di riga, fare in modo che da avere degli zeri sopra ciascuno di essi, cioè ridurci ad avere la matrice identità. Il procedimento è simile a quello usato nella dimostrazione della Proposizione 3.4.8 (iniziando dall'ultima colonna anziché dalla prima). Facendo tutte queste trasformazioni di riga alla matrice M (non solo su A!) si ottiene allora una matrice

$$M' = (I_n, B)\,. \tag{3.7}$$

Diciamo che B è proprio l'inversa di A. Infatti le trasformazioni di riga su M corrispondono esattamente a moltiplicarla a sinistra per un'opportuna matrice T. Abbiamo cioè:

$$M' = T \cdot M = T \cdot (A, I_n) = (T \cdot A, T)\,,$$

da cui segue per confronto con la (3.7):

$$T \cdot A = I_n \,, \qquad T = B \,,$$

quindi $B \cdot A = I_n$.

3.7 Caratteristica di una matrice

Per matrici di tipo qualunque, anche rettangolari, si può introdurre un altro indicatore che risulterà di fondamentale importanza.

Definizione 3.7.1 *Data una matrice A, si dice* minore *di A (di ordine k) una matrice quadrata (di ordine k) che si ottiene scegliendo k righe e k colonne di A e considerando gli elementi disposti su tali righe e colonne, mantenuti nello stesso ordine.*

Esempio 3.7.2 *Data* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$*, se scelgo la 1ª,2ª e 3ª riga e 1ª, 3ª e 5ª colonna, ottengo il seguente minore di ordine 3:*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} .$$

Chiaramente da ogni matrice si possono estrarre molti minori di vari ordini. Se una matrice A è di tipo $n \times m$, il massimo ordine che un minore estraibile da A può avere è il minimo tra n e m. Se A è quadrata di ordine n, essa stessa è (l'unico) minore di A di ordine n.

Definizione 3.7.3 *La matrice A si dice avere* caratteristica *o* rango *k se:*
1) Esiste un minore di A di ordine k con determinante non nullo.
2) Tutti i minori di A di ordine maggiore di k hanno determinante nullo.
In tal caso scriviamo $\mathrm{car}A = k$*, o anche* $\mathrm{rk}A = k$*.*

La matrice nulla ha caratteristica zero.

Esempio 3.7.4 *1) Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \tag{3.8}$$

Osserviamo che il minore $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*, ottenuto scegliendo le prime due righe e le prime due colonne, ha determinante non nullo, mentre tutti i minori di ordine* 3*:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

hanno determinante zero. Quindi la caratteristica di A *è* 2*.*
2) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det B = -1 \neq 0$*,* $\text{car} B = 3$*.*

Si noti che, se A è quadrata di ordine n, allora $\text{car} A = n$ se e solo se $\det A \neq 0$.

Si badi bene al fatto che la caratteristica di una matrice è sempre un numero intero non negativo, a differenza del determinante che è un numero reale.

Osservazione 3.7.5 *Se ho dimostrato che tutti i minori di ordine* k *hanno determinante nullo, è inutile proseguire alla ricerca di minori di ordine ancora maggiore aventi determinante diverso da zero. Infatti, per lo sviluppo di Laplace, il determinante di un minore di ordine* h *si scrive come combinazione lineare di un certo numero di determinanti di ordine* $k < h$ *e, se questi sono tutti nulli, anche il minore di ordine* h *avrà determinante uguale a zero.*

Osservazione 3.7.6 *Le trasformazioni elementari di riga non alterano il rango di una matrice, cioè applicando trasformazioni elementari di riga ad una matrice si ottengono matrici con lo stesso rango. Quindi matrici equivalenti per riga hanno stesso rango. Lo stesso vale per le colonne.*

Proposizione 3.7.7 *Sia* A *una matrice di caratteristica* p *e indichiamo con* $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_p}$ *le colonne che vanno a formare un minore* M *di ordine* p *con determinante non nullo. Allora ogni altra colonna* A_h *di* A *si può ottenere come combinazione lineare di queste. Analogamente per le righe.*

Dim. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che le colonne che formano M siano le prime p colonne e le righe che formano M siano le prime p righe. Sia A'_h la colonna che si ottiene considerando i primi p elementi di A_h. Sia Λ la colonna di p elementi così definita:

$$\Lambda = M^{-1} A'_h \, .$$

Si noti che $M\Lambda = A'_h$.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono gli elementi di Λ, sia A''_h la colonna così ottenuta:

$$A''_h = A_h - (\lambda_1 A_{k_1} + \cdots + \lambda_p A_{k_p}) \, .$$

È facile vedere che i primi p elementi di A''_h sono tutti zero. Se A''_h è una colonna fatta da tutti zeri, allora A_h è combinazione lineare degli A_{k_i}, come volevasi. Se, per assurdo, vi fosse un elemento di A''_h diverso da zero, ad esempio il j-esimo, consideriamo il minore M' di ordine $p+1$ di A ottenuto considerando le prime p righe di A più la j-esima e le prime p colonne di A più la h-esima, cioè A_h. Calcoliamo il determinante di M'. Sappiamo che il determinante di una matrice è uguale al determinante della matrice che si ottiene sottraendo ad una colonna una combinazione lineare delle altre. Nel nostro caso, se sottraiamo all'ultima colonna di M' la combinazione lineare delle altre con coefficienti i λ_i di cui sopra, si ottiene una matrice M'' che ha come ultima colonna tutti 0 tranne all'ultimo posto dove vi è un elemento $a \neq 0$. Se calcoliamo $\det M'' = \det M'$ secondo l'ultima colonna si ha che: $\det M'' = a \det M \neq 0$. Ma ciò è impossibile, perché allora A avrebbe un minore di ordine $p+1$, cioè M', con determinante non nullo, mentre, per ipotesi, $\mathrm{car} A = p$.

L'enunciato per le righe si può ottenere ripetendo lo stesso ragionamento con ${}^tA$. □

Corollario 3.7.8 *Se A' è una matrice ottenuta da A aggiungendo una colonna B, allora* $\mathrm{car} A \leq \mathrm{car} A'$. *Inoltre:*
B è una cominazione lineare delle colonne di A se e solo se $\mathrm{car} A = \mathrm{car} A'$.

Determinare la caratteristica di una matrice è un procedimento abbastanza laborioso, perché occorre calcolare molti determinanti. Per ridurre il numero di casi da analizzare, si può utilizzare il risultato che segue.

Definizione 3.7.9 *Se M è un minore di A, un* orlato *di M è un minore di A che ha M come suo minore.*

In sostanza un orlato di M è un minore di A che si ottiene aggiungendo a M delle righe e delle colonne di A.

Proposizione 3.7.10 *Sia A una matrice e M un suo minore con* $\det M \neq 0$ *di ordine h. Se ogni orlato di M di ordine $h+1$ ha determinante nullo, allora* $\text{car}A = h$.

Dim. Supponiamo che ogni orlato M' di M di ordine $h+1$ sia non invertibile. Basta dimostrare che il rango di A è h. Consideriamo la matrice $\tilde{A}$ formata dalle colonne che individuano il minore M. Questa ha rango h. Se aggiungiamo a questa matrice una qualsiasi altra colonna A_j di A, per l'ipotesi fatta, otteniamo una matrice ancora di rango h. Quindi, per il Corollario 3.7.8, la colonna A_j è combinazione lineare delle colonne di $\tilde{A}$ e, con operazione elementari di colonna, può essere rimpiazzata con una colonna nulla senza per questo alterare il valore del rango della matrice. Ripetendo lo stesso procedimento per ogni colonna di A che non sia tra quelle che individuano il minore M, troviamo cha la matrice A ha stesso rango di una matrice che come colonne (a meno dell'ordine) quelle di $\tilde{A}$ oltre a colonne nulle, che ha chiaramente rango h. Abbiamo così provato che $\text{rk}A = h$. $\square$

Abbiamo dunque il seguente:

Criterio 3.7.11 (del minore orlato) *Una matrice A ha caratteristica r se e solo se esiste un minore di A invertibile tale che ogni suo orlato di ordine $r+1$ non sia invertibile.*

Il risultato sopra permette di semplificare il calcolo del rango di una matrice.

Ad esempio, nel caso della matrice in (3.8), dopo aver individuato un minore di ordine 2 con determinante non nullo, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, bastava limitarsi a considerare solo i minori di ordine 3 che contenevano M:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché essi hanno determinante nullo, potevamo subito concludere, per il criterio dei minori orlati, che $\text{car}A = 2$.

3.8 Esercizi

1) Provare che, se A e B sono matrici antisimmetriche, allora $AB - BA$ è ancora antisimmetrica.

Determinanti

2) Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} ; \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} ; \tag{3.10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix} ; \tag{3.11}$$

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} ; \tag{3.12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} ; \tag{3.13}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.14}$$

3) Una matrice quadrata della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_h \end{pmatrix},$$

con $A_1, \dots, A_n$ matrici quadrate (dove 0 indica una matrice nulla di ordine opportuno), si dice *matrice diagonale a blocchi*. Si provi che

$$\det A = \det A_1 \cdots \det A_n \,.$$

4) Dimostrare che una matrice reale antisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo. Si può dire qualcosa di analogo per quelle di ordine pari?

5) Verificare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili due volte, allora si ha

$$\det \begin{pmatrix} f & f' \\ g & g' \end{pmatrix}' = \det \begin{pmatrix} f & f'' \\ g & g'' \end{pmatrix},$$

6) Provare per induzione il seguente risultato (det. di Vandermonde)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \Pi_{i<j}(x_j - x_i)\,. \tag{3.15}$$

Invertibilità di matrici

7) Stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, calcolare la matrice inversa (verificandone il risultato):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \tag{3.17}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \tag{3.18}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \tag{3.19}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

8) Stabilire se esiste una matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ esiste $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operazioni di riga - Rango di matrici

10) Si riducano con operazioni elementari di riga a forma triangolare le seguenti matrici e, nel caso di matrici invertibili, si calcoli l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{3.21}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

11) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 9 & 7 \\ 9 & -3 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \tag{3.24}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 7+i \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.25}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & -1 & -4 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

12) Calcolare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & -3 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.27}$$

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

13) Dimostrare che una matrice reale antisimmetrica ha rango pari. In particolare il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari è nullo.

14) Data una matrice A di tipo $m \times n$ e un suo minore M di ordine p, si calcolino quanti sono i minori di A ordine k e gli orlati di M di ordine k.

Capitolo 4

SISTEMI LINEARI

4.1 Sistemi lineari

Definizione 4.1.1 *Si dice* sistema lineare *di m equazioni in n incognite un insieme di m equazioni algebriche tali che siano tutte dei polinomi di primo grado in n indeterminate a coefficienti reali (eventualmente complessi) uguagliati a zero.*

Un sistema lineare si può scrivere:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

dove gli x_i sono le incognite, gli a_{ij} sono i coefficienti, e i b_i sono i termini noti.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che ha al posto (i, j) il coefficiente a_{ij} della j-esima incognita nella i-esima equazione, si dice *matrice dei coefficienti (o incompleta)* del sistema. Essa è di tipo $m \times n$, dove m è il numero di equazioni e n è il numero delle incognite.

La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

che si ottiene da A con l'aggiunta della colonna dei termini noti, si dice *matrice completa* del sistema. Essa è di tipo $m \times (n+1)$.

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la n-upla delle incognite e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la m-upla dei termini noti, il sistema (4.1) si può scrivere in *forma matriciale*:

$$A \cdot X = B\,. \tag{4.2}$$

Qui $A \cdot X$ è il prodotto riga per colonna tra A, matrice di tipo $m \times n$ e X matrice di tipo $n \times 1$ il cui risultato è una matrice $m \times 1$ che deve essere uguagliata a B, che è dello stesso tipo.

Definizione 4.1.2 *Una n-upla* $(s_1, \cdots, s_n)$ *di numeri reali è detta una* soluzione *del sistema dato se, sostituendo alla indeterminata* x_i *il numero reale* s_i *in ogni equazione del sistema, tutte le equazioni risultano verificate.*

Osservazione 4.1.3 *Se indichiamo con* $A_1, \dots, A_n$ *le colonne della matrice A, dato* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*, osserviamo che*

$$AX = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n\,,$$

cioè il prodotto righe per colonne AX è uguale alla combinazione lineare della colonne di A con coefficienti $x_1, \dots, x_n$.

Dunque, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *è soluzione del sistema* $AX = B$ *se e solo se*

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = B\,,$$

cioè se e solo se la colonna B dei termini noti è combinazione lineare della colonne di A con coefficienti $x_1, \dots, x_n$.

Il problema consiste ora, dato un sistema lineare, nello stabilire se esistono soluzioni e, in caso affermativo, determinarle tutte.

Nel caso in cui si abbia un sistema di n equazioni in n incognite, per il quale quindi la matrice dei coefficienti è quadrata, vale il seguente importante risultato:

Teorema 4.1.4 (Cramer) *Sia $\mathcal{S}$ un sistema di n equazioni in n incognite e sia A la matrice dei coefficienti di $\mathcal{S}$. Se $\det A \neq 0$, allora il sistema è risolubile, ammette una unica soluzione.*

Tale soluzione S è data dalla seguente formula, detta formula di Cramer*:*

$$S = (s_1, \ldots, s_n), \qquad \textit{con } s_i = \frac{\det \hat{A}_i}{\det A}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

dove $\hat{A}_i$ è la matrice che si ottiene sostituendo in A la i-esima colonna con la colonna dei termini noti.

Dim. Poiché $\det A \neq 0$, A è invertibile. Poniamo:

$$S = A^{-1} \cdot B, \qquad \text{dove } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ è la colonna dei termini noti.}$$

Allora è chiaro che, scrivendo il sistema in forma matriciale $A \cdot X = B$, la n-upla S sia una soluzione; infatti, sostituita alla n-upla X, si ha che:

$$A \cdot S = A \cdot A^{-1} \cdot B = B.$$

Tale soluzione è unica. Siano S_1 ed S_2 due soluzioni del sistema, sia cioè $A \cdot S_i = B$ per $i = 1, 2$. Allora $A \cdot S_1 - A \cdot S_2 = B - B = 0$, da cui $A \cdot (S_1 - S_2) = 0$. Moltiplicando a sinistra per A^{-1} si ottiene $A^{-1} \cdot A \cdot (S_1 - S_2) = (S_1 - S_2) = A^{-1} \cdot 0 = 0$ e quindi $S_1 = S_2$.

Giustifichiamo ora la formula (4.3). Basta verificare che:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \text{ con } s_i = \frac{\det \hat{A}_i}{\det A}, \ i = 1, \ldots, n;$$

quindi la i-esima riga di A^{-1} moltiplicata per la colonna B dei termini noti deve essere uguale a s_i. Proviamolo, a titolo di esempio, per $i = 1$. Per

quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 3.6.1, la prima riga di A^{-1} moltiplicata per B dà

$$\frac{b_1 \det A_{11} - b_2 \det A_{21} + \cdots + (-1)^{k+1} b_k \det A_{k1} + \cdots + (-1)^{1+n} b_n \det A_{n1}}{\det A},$$

ma il numeratore è proprio $\det \hat{A}_1$ sviluppato secondo la prima colonna. □

Esempio 4.1.5 *Sia dato il sistema $\mathcal{S}$:*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1\,, \\ x + y + 2z = 0\,, \\ y - \frac{1}{2}z = 0\,. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *e si ha* $\det A = -\frac{11}{2} \neq 0$.

Siamo quindi nelle condizioni di applicare il teorema di Cramer.

$$x = \frac{\det \tilde{A}_1}{\det A} \text{ dove } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x = -\frac{2}{11} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{11}\,,$$

$$y = \frac{\det \tilde{A}_2}{\det A} \text{ dove } \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{2}{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{11}\,,$$

$$z = \frac{\det \tilde{A}_3}{\det A} \text{ dove } \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z = -\frac{2}{11} \cdot 1 = -\frac{2}{11}\,.$$

La terna $(\frac{5}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{2}{11})$ *è soluzione del sistema* $\mathcal{S}$. *Verificarlo. Tale soluzione è unica.*

Definizione 4.1.6 *Un sistema lineare si dice* omogeneo *se tutti i termini noti sono zero.*

Osservazione 4.1.7 *Ovviamente un sistema omogeneo ammette sempre almeno una soluzione: la n-upla di zeri.*

Se un sistema omogeneo verifica le ipotesi del teorema di Cramer, tale soluzione, detta soluzione banale, è anche unica.

Purtroppo, il teorema di Cramer non ci è d'aiuto quando:

1. $\det A = 0$,

2. A è rettangolare, ossia il numero delle equazioni del sistema è diverso dal numero delle incognite,

essendo A è sempre la matrice dei coefficienti.

In tutti i casi, però, possiamo applicare il seguente fondamentale risultato:

Teorema 4.1.8 (Rouché-Capelli) *Dato un sistema lineare $\mathcal{S}$, esso è risolubile se e solo se*

$$\mathrm{car}A = \mathrm{car}A'$$

dove A e A' sono rispettivamente la matrice dei coefficienti e la matrice completa di $\mathcal{S}$.

Dim. Per l'Osservazione 4.1.3, il sistema $AX = B$ ha soluzione se e solo se la colonna B dei termini noti è esprimibile combinazione lineare delle colonne della matrice A. Per il Corollario 3.7.8, questo è possibile se e solo se la caratteristica della matrice A e della matrice A' (ottenuta da A aggiungendo la colonna B) coincidono. □

4.2 Risoluzione dei sistemi lineari

A questo punto sappiamo dire se un dato sistema ha soluzioni oppure no. Vogliamo dare un procedimento algoritmico che permetta di determinare, quando esistono, tutte le soluzioni del sistema dato, qualora non fosse applicabile il teorema di Cramer.

Schema 1 *Consideriamo il sistema in forma matriciale:*

$$AX = B\,.$$

1) Si verifichi per prima cosa che il sistema abbia soluzioni, cioè per Rouché-Capelli, che $\mathrm{car}A = \mathrm{car}A'$, dove A' è la matrice completa.
2) Se M è un minore di A (e anche di A') con determinante non nullo di ordine massimo, possiamo trascurare, letteralmente cancellandole, tutte le equazioni del sistema le cui righe corrispondenti non fanno parte di M.

Il sistema così ottenuto è equivalente al sistema dato, cioè i due sistemi hanno lo stesso insieme di soluzioni. Infatti se una equazione $f(X) = 0$ *si ottiene come combinazione di altre equazioni* $f_i(X) = 0$ *(nel senso che* $f(X) = \lambda_1 f_1(X) + \cdots + \lambda_n f_n(X)$*), se* Y *è una soluzione comune all'insieme di equazioni* $f_1(X) = 0, \ldots, f_n(X) = 0$*,* Y *è soluzione anche dell'insieme di funzioni* $f_1(X) = 0, \ldots, f_n(X) = 0$*,* $f(X) = 0$ *e, ovviamente, viceversa.*
3) I termini delle incognite i cui corrispondenti coefficienti formano colonne che non stanno in M *vengono portati a termine noto e considerati come parametri.*
4) Se k *è il rango di* A*, a questo punto abbiamo un sistema di* k *equazioni (abbiamo cancellato tutte le altre) in* k *incognite, mentre tutte le altre* $n-k$ *incognite sono da considerarsi parametri. Di questo sistema* M *è la matrice dei coefficienti ed ha determinante non nullo.*
5) Si risolve questo sistema con il metodo di Cramer, tenendo conto del fatto che i termini noti non sono costanti ma dipendono da $n-k$ *parametri, parametri che compariranno nella espressione delle soluzioni.*

Esempio 4.2.1 *Sia* $\mathcal{S}$ *il seguente sistema:*

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y + w = 1\,, \\ x + \frac{1}{2}y + z + w = 1\,, \\ x - y + w = 1\,. \end{cases}$$

È un sistema di tre equazioni in quattro incognite. La matrice dei coefficienti A *è*

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Calcoliamo il suo rango. Osserviamo che il minore

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\frac{3}{2}$*. Allora* $\mathrm{car}A = 3$*.*

Necessariamente, essendo una matrice 3×5*, anche* A' *ha rango* 3*, dunque il sistema è risolubile.*

Poiché nessuna riga è esclusa dalla formazione di M*, non dobbiamo cancellare nessuna equazione.*

L'incognita w, i cui coefficienti formano la quarta colonna di A, esclusa da M, è da considerare come parametro e i termini che la contengono vanno portati a termine noto.

Si perviene ad un sistema $\mathcal{S}'$ equivalente ad $\mathcal{S}$ che ha M coma matrice dei coefficienti e come colonna dei termini noti $B' = \begin{pmatrix} 1-w \\ 1-w \\ 1-w \end{pmatrix}$.

Applicando il metodo di risoluzione di Cramer a $\mathcal{S}'$ si ha:

$$x = \frac{\det M_1}{\det M}\,, \ dove\ M_1 = \begin{pmatrix} 1-w & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1-w & \frac{1}{2} & 1 \\ 1-w & -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad da\ cui\ x = \frac{1}{3}(1-w)\,,$$

$$y = \frac{\det M_2}{\det M}\,, \ dove\ M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1-w & 0 \\ 1 & 1-w & 1 \\ 1 & 1-w & 0 \end{pmatrix}\,, \quad da\ cui\ y = -\frac{2}{3}(1-w)\,,$$

$$z = \frac{\det M_3}{\det M}\,, \ dove\ M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1-w \\ 1 & \frac{1}{2} & 1-w \\ 1 & -1 & 1-w \end{pmatrix}\,, \quad da\ cui\ z = (1-w)\,.$$

Al limite, per enfatizzare la trasformazione di w in parametro, cioè la possibilità di attribuirgli un valore arbitrario e da questo ricavare i corrispondenti valori delle altre incognite che vanno a costituire una soluzione, che, ricordiamo, è una n-upla (in questo caso una quaterna) di valori, possiamo introdurre come parametro reale t, porre $w = t$ e scrivere:

Il sistema $\mathcal{S}$ ammette come soluzioni tutte le quaterne di numeri reali:

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-t) \\ -\frac{2}{3}(1-t) \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \ con\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Il sistema ammette dunque infinite soluzioni che sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}$.

Il numero di parametri che compaiono nella descrizione dell'insieme delle soluzioni di un sistema è $n-k$ dove n è il numero di incognite e k è il rango di A.

4.3 Il metodo di Gauss-Jordan

Torniamo al caso di un sistema di n equazioni in n incognite in cui la matrice dei coefficienti abbia determinente non nullo. In questo caso si può applicare il teorema di Cramer ed essere sicuri dell'esistenza di una unica soluzione. Inoltre, con la formula data siamo in grado, teoricamente, di determinarla. Il problema non teorico ma di calcolo nasce dal fatto che per trovare con quel metodo la soluzione occorre calcolare un certo numero di determinanti. Fintanto che le dimensioni del sistema sono piccole, va ancora bene, ma non appena il sistema diventa molto grande (e in molte applicazioni numeriche questa è la regola, avendosi sistemi con migliaia di incognite), il calcolo dei determinanti diventa oneroso anche per macchine molto potenti. Vogliamo descrivere un metodo, detto di Gauss-Jordan, che permetta di risparmiare una considerevole quantità di calcoli.

Tutto parte dalla seguente semplice osservazione.

Osservazione 4.3.1 *Supponiamo di eseguire le trasformazioni elementari di riga sulla matrice completa A' di un sistema. La matrice che si ottiene è la matrice completa di un sistema equivalente a quello dato. Infatti, se scambiamo due righe di A', a livello di sistema, significa scambiare l'ordine delle equazioni. Ma l'insieme delle soluzioni, che è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni, non cambia (proprietà commutativa dell'intersezione). Per ciò che concerne le trasformazioni di secondo tipo, date n equazioni $f_1(X) = 0, \ldots, f_n(X) = 0$, Y è soluzione comune a queste se e solo se è soluzione comune a $f_1(X) = 0, \ldots, f_{n-1}(X) = 0$ e $\lambda_1 f_1(X) + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(X) + f_n(X) = 0$.*

Schema 2 *Dato un sistema di n equazioni in n incognite, sia A la matrice dei coefficienti e B la colonna dai termini noti. Supponiamo che* $\det A \neq 0$ *e quindi ci troviamo nelle ipotesi del teorema di Cramer.*
1) Ridurre A a forma triangolare mediante trasformazioni elementari di riga (assolutamente non di colonna) secondo il procedimento descritto nella dimostrazione di 3.4.8, ottenendo così una matrice A'.
2) Eseguire contemporaneamente le stesse trasformazioni elementari sulla colonna dei termini noti, ottenendo una colonna B'.
3) Poiché la matrice A' ottenuta sopra è triangolare, l'ultima equazione del sistema associato $A' \cdot X = B'$, è di primo grado con una sola incognita e

dunque immediatamente risolubile. Quindi:

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}\,.$$

4) Sostituire il valore di x_n così ottenuto nella penultima equazione che diventa allora una equazione nella sola incognita x_{n-1}, che può dunque facilmente essere ricavata.
5) In generale, poiché la matrice dei coefficienti è triangolare, la i-esima equazione contiene solo le incognite x_j con $j \geq i$.

Quindi dopo aver ricavato dalle altre equazioni i valori di $x_{i+1}, \ldots, x_n$, sostituendo questi valori nella i-esima equazione, l'unica incognita che resta è la x_i, che a sua volta viene ricavata.

Esempio 4.3.2 *Sia $\mathcal{S}$ il sistema $A \cdot X = B$, dove:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Poiché $a_{11} = 0$, scambio la prima riga di A con l'ultima, che ha primo termine non nullo. Stessa operazione compio su B.

Ottengo come nuove matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Sommo alla terza riga la prima moltiplicata per $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$. Stessa cosa per B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Sommo alla seconda riga la prima moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$. Stessa cosa per B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto la prima colonna ha tutti gli elementi nulli tranne il primo. Inizio la trasformazione della seconda colonna, come se stessi lavorando sul minore $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Sommo alla quarta riga la seconda moltiplicata per $-\frac{a_{42}}{a_{22}} = 1$. *Stessa cosa per B.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5) Sommo alla terza riga la seconda moltiplicata per $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{1}{2}$. *Stessa cosa per B.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anche la seconda colonna ha tutti gli elementi situati sotto la diagonale principale uguali a zero. Affrontiamo la trasformazione della terza colonna.
6) Sommo alla quarta riga la terza moltiplicata per $-\frac{a_{43}}{a_{33}} = 6$. *Stessa cosa per B.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

A questo punto la triangolarizzazione di A è completata.

Iniziamo a ricavare, partendo da x_4, *i valori da attribuire alle incognite per avere la soluzione.*
7) $x_4 = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$.
8) $-x_3 + 4 \cdot \frac{6}{7} = 3$, *da cui* $x_3 = \frac{3}{7}$.
9) $-x_2 + 6 \cdot \frac{3}{7} - 4 \cdot \frac{6}{7} = -1$, *da cui* $x_2 = \frac{1}{7}$.
10) $x_1 + \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{6}{7} = 1$, *da cui* $x_1 = 0$.
Dunque la soluzione del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

4.4 Esercizi

Sistemi lineari (senza parametri)

1) Discutere (e quando possibile risolvere) i seguenti lineari:

$$\begin{cases} x+y-3z=0\,, \\ 2x-y=1\,, \\ 2y-z=0\,; \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} x+y-z=5\,, \\ 4x-y-5z=6\,, \\ x-4y-2z=-4\,; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=1\,, \\ x_1+x_2-x_3=0\,, \\ x_1-x_4=2\,; \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1\,, \\ 4x_1+x_2+2x_3=1\,, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\,, \\ 5x_1+4x_3+2x_4=3\,; \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1\,, \\ 5x+3y+3z=2\,, \\ 7x+4y+5z=3\,, \\ x+y-z=0\,; \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=3\,, \\ x_1-x_2+x_3-4x_4=-5\,, \\ 5x_1+x_2-3x_3-2x_4=-9\,, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=-2\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Sistemi lineari (con parametri)

2) Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + kx_4 = 0\,, \\ kx_2 + x_3 - x_4 = 1\,, \\ 3x_1 + 4x_2 = 2\,; \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} (2k+1)x + (k+1)y + 3kz = k\,, \\ (2k-1)x + (k-2)y + (2k-1)z = k+1\,, \\ 3kx + 2ky + (4k-1)z = 1\,; \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2\,, \\ 3x - y + 2z = 6\,, \\ x + 2y + 3z = 2\,, \\ 5x + ky - z = 3k\,; \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} x - 2y + kz = 0\,, \\ y - z = 1\,, \\ 2x + y = 2\,, \\ x - y + z = k\,. \end{cases} \tag{4.13}$$

3) Discutere, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la risolubilità dei seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} y - \lambda z = 1\,, \\ x - \mu y + z = \lambda\,, \\ \mu y - \lambda z = \mu\,; \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} x + y - z = \mu\,, \\ y + z = \lambda\,, \\ x + \lambda z = -\mu\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Capitolo 5

SPAZI VETTORIALI

5.1 Spazi vettoriali. Definizione ed esempi

Definizione 5.1.1 *Un insieme V si dice* spazio vettoriale *sul campo $\mathbb{K}$ se sono verificate le seguenti condizioni:*

a. Esiste una operazione binaria interna da $V \times V$ in V, detta somma, *indicata con il simbolo $+$, munito della quale V è un gruppo abeliano. Ciò vuol dire che:*

a.1. La somma è associativa, cioè

$$u + (v + w) = (u + v) + w\,, \quad \forall u, v, w \in V\,.$$

a.2. Esiste un elemento di V, solitamente indicato con 0_V, tale che:

$$u + 0_V = 0_V + u = u\,, \quad \forall u \in V\,.$$

0_V viene detto elemento neutro *oppure* zero *di V. Se ciò non dà luogo ad ambiguità, 0_V può essere scritto semplicemente come 0.*

a.3. Per ogni elemento di V esiste un unico elemento, che sarà indicato con $-u$, tale che:

$$u + (-u) = (-u) + u = 0\,.$$

*L'elemento $-u$ viene detto l'*opposto *di u.*

a.4. La somma è commutativa, cioè:

$$u + v = v + u\,, \quad \forall u, v \in V\,.$$

b. Esiste, inoltre, un'operazione da $\mathbb{K}\times V$ *in* V*, detta* prodotto per scalare*, indicata nel seguito con il simbolo* $\cdot$ *(simbolo che in molti casi può essere omesso in analogia con la moltiplicazione tra numeri reali), avente le seguenti proprietà.*
Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $u, v \in V$*, si ha:*
b.1. $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
b.2. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$,
b.3. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
b.4. Se 1 *è l'identità del prodotto di* $\mathbb{K}$*, si ha* $1 \cdot u = u$*, per ogni* $u \in V$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale in generale si dicono vettori.

Il campo $\mathbb{K}$ *viene detto anche* campo base *e i suoi elementi si dicono* scalari.

È sempre importante tener presente il campo base $\mathbb{K}$; per enfatizzare questo, specialmente se vi è pericolo di confusione, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, diremo che V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Nel seguito, supporremo sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e, in qualche caso specificato, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Facciamo alcune precisazioni. Nella precedente definizione vi è stato un abuso di notazione; infatti, il simbolo $+$ è servito per indicare sia la somma in V che la somma in $\mathbb{K}$. Queste due operazioni, in alcuni esempi, saranno strettamente imparentate, ma in generale tra di esse non vi è alcuna correlazione. Lo stesso dicasi per il simbolo $\cdot$, che sta ad indicare sia il prodotto tra elementi di $\mathbb{K}$ che il prodotto per scalare.

Il segno $\cdot$ verrà sovente omesso, dopo esserci rassicurati sulla nostra capacità di percepire i diversi significati indicando, per esercizio, nella definizione precedente, quando esso indica il prodotto di $\mathbb{K}$ e quando, invece, il prodotto per scalare.

Vediamo ora qualche conseguenza immediata della definizione.

Osservazione 5.1.2 *Sia* u *un qualsiasi elemento dello spazio vettoriale* V *e* $\lambda \in \mathbb{K}$ *uno scalare qualsiasi. Indichiamo con* 0 *l'elemento neutro della somma del campo* $\mathbb{K}$*. Allora si ha:*

1) $0 \cdot u = 0_V$.
Infatti, $u = 1 \cdot u = (1 + 0) \cdot u = 1 \cdot u + 0 \cdot u = u + 0 \cdot u$.

2) $(-1) \cdot u = -u$.
Infatti, $0_V = 0 \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = u + (-1) \cdot u$*;* *quindi* $(-1) \cdot u = -u$*, per l'unicità dell'opposto di* u.

3) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.
Infatti, $\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V$.

Esempio 5.1.3 *1)* $\mathbb{R}$.
L'insieme dei numeri reali è uno spazio vettoriale su se stesso, considerando come operazione di somma la stessa somma tra numeri reali e come prodotto per scalare il prodotto stesso di $\mathbb{R}$. *Lasciamo come esercizio la verifica in dettaglio.*
2) $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo come somma tra coppie la seguente operazione:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

e come prodotto per scalare il seguente:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Anche in questo caso è elementare verificare che sono soddisfatte tutte le proprietà della definizione di spazio vettoriale. Procedendo in modo analogo, si può definire una struttura di $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale su* $\mathbb{R}^n$.
3) $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
L'insieme delle matrici dello stello stesso tipo a valori reali forma un $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma tra matrici e di prodotto per uno scalare viste a loro tempo.*
4) $\mathbb{C}$.
L'insieme dei numeri complessi è un $\mathbb{C}$*-spazio vettoriale con le stesse operazioni di campo di cui è munito, in completa analogia con l'esempio 1). Non è però ozioso notare che è anche un* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale.*
5) $\mathbb{R}[x]$.
L'insieme dei polinomi a coefficienti reali, con le solite operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
6) $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.
L'insieme i cui elementi sono le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, *dove* A *è un insieme qualsiasi. Per ogni coppia di elementi* f, g *di* $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *definiamo allora* $h = f + g$ *ponendo:*
i) $h(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
e definiamo il prodotto per scalare (λf) *ponendo:*
ii) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Teniamo presente che $f(x)$, $g(x)$, λ *sono numeri reali e quindi le operazioni*

a secondo membro nelle due uguaglianze sono tra elementi di $\mathbb{R}$. *La verifica dettagliata del fatto che* $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *munito delle operazioni suddette, sia uno spazio vettoriale reale è lasciata per esercizio.*
7) L'insieme dei vettori geometrici.
Quello che segue è un esempio importante per visualizzare intuitivamente gli spazi vettoriali. Cominciamo richiamando alcune definizioni. Per segmento orientato *si intende un segmento nello spazio ordinario della geometria di Euclide (quello studiato nelle scuole superiori, per intendersi) del quale si sia stabilito quale sia il primo estremo e quale il secondo. Ovverosia, se i punti* A *e* B *sono rispettivamente il primo ed il secondo estremo del segmento* AB, *tale segmento orientato verrà indicato con* $\overrightarrow{AB}$, *dove la freccia sta ad evidenziare la relazione d'ordine tra gli estremi del segmento. Chiaramente il simbolo* $\overleftarrow{AB}$ *sta ad indicare lo stesso segmento ma con la orientazione opposta degli estremi, quindi, in definitiva, un diverso segmento orientato. Poniamo ora, sull'insieme di tutti i segmenti orientati la seguente relazione di equivalenza:*

Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equivalenti se e solo se essi giacciono sullo stesso piano ed inoltre il quadrilatero $ABDC$, avente come lati i segmenti AB, BD, DC, CA, è un parallelogrammo.
In altre parole, due segmenti orientati sono equivalenti, secondo la definizione, se giacciono su due rette parallele e traslando una di queste rette sempre parallela a se stessa, è possibile portare i due segmenti a coincidere in guisa tale che il primo ed il secondo estremo di uno vada a sovrapporsi, rispettivamente, al primo ed al secondo estremo dell'altro. Debbono perciò avere la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. È per questo facile convincersi che la precedente relazione è effettivamente di equivalenza.

Si dice *vettore geometrico* una qualsiasi classe di equivalenza della precedente relazione.

Si dice *vettore applicato* nel punto P, il rappresentante di una classe di equivalenza avente come primo estremo il punto P.
Definiamo sull'insieme $\mathbf{V}$ *dei vettori geometrici una operazione di somma ed una operazione di prodotto di un vettore per un numero reale che daranno a* $\mathbf{V}$ *la struttura di spazio vettoriale.*

La somma. *Dati due vettori geometrici* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *cioè due classi di equivalenza, sia* $\overrightarrow{AB}$ *un rappresentante di* $\mathbf{u}$. *Si scelga allora, come rappresentante di* $\mathbf{v}$, *il vettore applicato nel punto* B. *Sia esso il segmento* $\overrightarrow{BC}$. *Allora, per*

definizione, la loro somma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ *sarà la classe di equivalenza del segmento* $\overrightarrow{AC}$.

In primo luogo, se A *coincide con* B*, allora il segmento orientato* $\overrightarrow{AA}$ *rappresenta il vettore nullo e risulterà lo zero di* $\mathbf{V}$.

Semplici costruzioni geometriche permettono di verificare che tale operazione gode delle proprietà commutativa e associativa.

Per inciso, se $\overrightarrow{AB}$ *è un rappresentante di* $\mathbf{v}$*, il vettore* $-\mathbf{v}$ *è rappresentato dal segmento orientato* $\overrightarrow{BA}$.

Il prodotto per scalare. *Se* $\mathbf{v}$ *è un vettore e* k *è un numero reale, allora* $k\mathbf{v}$ *sarà il vettore avente la stessa direzione di* $\mathbf{v}$*, lunghezza uguale a quella di* $\mathbf{v}$ *moltiplicata per* $|k|$ *e stessa direzione di* $\mathbf{v}$*, se* $k > 0$*, oppure direzione opposta, se* $k < 0$*; infine, se* $k = 0$*, allora* $k\mathbf{v}$ *è il vettore nullo.*

Con semplici ma lunghe costruzioni geometriche è possibile verificare che tutte le proprietà richieste per essere uno spazio vettoriale sono soddisfatte.

5.2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, e sia W un sottoinsieme di V. Dati due elementi di W, è possibile sommarli e moltiplicarli per degli scalari, ma in generale i risultati di tali operazioni non è detto che appartengano a W. Ad esempio, sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. C è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che contiene, ad esempio, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ ma non contiene la loro somma $(1, 1)$ né il prodotto $3 \cdot (1, 0) = (3, 0)$.

Definizione 5.2.1 *Un sottoinsieme* non vuoto W *di uno spazio vettoriale* V *è un* sottospazio vettoriale *di* V*, se* W *è chiuso rispetto alle operazioni di* V*, ossia se:*
a) La somma di due elementi di W *appartiene ancora a* W*;*
b) Il prodotto di qualsiasi elemento di W *per uno scalare appartiene ancora a* W*.*

Osserviamo che l'insieme C dell'esempio precedente non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, mentre il sottoinsieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$ lo è. Infatti dati due elementi di D, i.e. (a, a) e (b, b), la loro somma $(a + b, a + b)$ appartiene ancora a D e se $k \in \mathbb{R}$, allora $k(a, a) = (ka, ka)$ appartiene ancora a D.

Osservazione 5.2.2 *Se W è un sottospazio di V, allora a sua volta W è uno spazio vettoriale. La verifica di questo fatto viene lasciata per esercizio. In particolare, $0_V \in W$.*

Osservazione 5.2.3 *Le condizioni a) a b) della definizione 5.2.1 sono indipendenti e debbono essere soddisfatte entrambe affinché W sia effettivamente un sottospazio vettoriale. Infatti consideriamo i seguenti esempi:*
a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è chiuso rispetto alla somma (è un sottogruppo di $\mathbb{R}$), ma non certo rispetto al prodotto per scalare .
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dalla unione degli assi cartesiani. A è chiuso rispetto al prodotto per scalare; infatti $(x, y) \in A$ se e solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Allora, se $(x, y) \in A$, anche $k(x, y) = (kx, ky)$ ha almeno una componente nulla e quindi appartiene ad A. Ma A non è chiuso rispetto alla somma. Infatti, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ appartengono ad A, ma non la loro somma $(1, 1)$.

Esempio 5.2.4 *Sia $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A{\cdot}X = \mathbf{0}\}$, dove A è una matrice $m \times n$ e $\mathbf{0}$ è lo zero di $\mathbb{R}^m$, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo avente A come matrice dei coefficienti. È facile verificare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.*

5.3 Dipendenza lineare

Dati alcuni elementi di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, le operazioni di cui V è munito ci permettono di costruirne degli altri nella maniera che segue:

Definizione 5.3.1 *Un elemento $v \in V$ si dice* combinazione lineare *degli elementi $v_1, \ldots, v_n$ di V se risulta che $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ per opportuni coefficienti λ_i appartenenti al campo base $\mathbb{K}$.*

Esempio 5.3.2 *Il vettore $(1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di $(1/2, 1, 1)$ e di $(0, 1/3, 0)$ con coefficienti 2 e -6. Infatti:*

$$(1, 0, 2) = 2(1/2, 1, 1) + (-6)(0, 1/3, 0)\,.$$

Proposizione 5.3.3 *Siano $v_1, \ldots, v_n$ elementi di uno spazio vettoriale V. Consideriamo il seguente sottoinsieme di V:*

$$V_0 = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\,,\ \text{con } \lambda_i \in \mathbb{K}\}\,,$$

cioè V_0 è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_n$. Allora V_0 è un sottospazio vettoriale di V. Esso si indica anche con $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Dim. Siano u e w due elementi di V_0. Per la definizione di V_0, risulta che $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ con λ_i e μ_i opportuni coefficienti. Allora il vettore somma $u + w$ risulterà:

$$\begin{aligned} u + w &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \, . \end{aligned}$$

Quindi anche $u + w$ si esprime come combinazione lineare dei vettori v_i e dunque appartiene a V_0.

Risulta così soddisfatta la proprietà a) della definizione 5.2.1. Procediamo a dimostrare che vale anche la b).

Se $u \in V_0$ e k è uno scalare, e se $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, allora $ku = k\lambda_1 v_1 + \cdots + k\lambda_n v_n$, che quindi è, per definizione, elemento di V_0. □

Osserviamo che lo zero di V è sempre esprimibile come combinazione lineare di vettori: basta infatti prendere i coefficienti della combinazione tutti nulli.

Definizione 5.3.4 *Dato un sottoinsieme X di V, il sottospazio vettoriale*

$$\hat{X} = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \, , \ \textit{con } \lambda_i \in \mathbb{K} \, , \quad v_i \in X\}$$

viene detto sottospazio generato *da X. Nulla vieta che coincida con V stesso.*

Un sottoinsieme X di V forma un insieme di generatori *di V, se accade che :*

$$V = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \, , \ \textit{con } \lambda_i \in \mathbb{K} \, , v_i \in X\} \, .$$

In altre parole, se lo spazio $\hat{X}$ coincide con tutto V.

Esempio 5.3.5 *I vettori $(1,1)$, $(0,2)$ e $(-1,1)$ sono dei generatori di $\mathbb{R}^2$. Infatti, sia (a,b) un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^2$. Voglio provare che esso si ottiene come combinazione lineare dei tre vettori dati, cioè che esistono tre coefficienti reali x, y, z, tali che:*

$$(a,b) = x(1,1) + y(0,2) + z(-1,1) \, . \tag{5.1}$$

Utilizzando le operazioni di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$*, possiamo scrivere:*

$$(a,b) = (x,x) + (0,2y) + (-z,z) = (x-z, x+2y+z)\,.$$

Questa uguaglianza tra vettori implica che debba sussistere l'uguaglianza tra le due componenti e perciò risulta essere equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x - z = a\,, \\ x + 2y + z = b\,. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di tale sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$*, che ha rango* 2*. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è sempre risolubile. Quindi, comunque presi* a *e* b*, troverò sempre degli opportuni coefficienti* x, y, z *tali che valga la relazione (5.1).*

Supponiamo che $v \in V$ si possa esprimere come combinazione dei vettori $v_1, \ldots, v_n$, cioè esistono dei coefficienti λ_i tali che $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Questi coefficienti sono unici oppure possono esistere degli altri coefficienti μ_i diversi dai λ_i ma tali che ugualmente si abbia $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$? Questa domanda motiva la seguente definizione.

Definizione 5.3.6 *Dei vettori* $v_1, \ldots, v_n$ *si dicono* linearmente dipendenti*, se esistono dei coefficienti* λ_i*,* $i = 1, \ldots, n$*,* non tutti nulli*, tali che*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V\,.$$

In caso contrario, si dicono linearmente indipendenti*.*

Un sottoinsieme $A \subset V$ *è detto* insieme linearmente dipendente *se contiene un numero finito di elementi* $a_1, \ldots, a_k$ *linearmente dipendenti. In caso contrario, se tutte le* n*-uple di elementi di* A *sono linearmente indipendenti, allora* A *viene detto* insieme linearmente indipendente*.*

Esempio 5.3.7 *I vettori* $(1,1)$*,* (0.2) *e* $(-1,1)$ *di* $\mathbb{R}^2$*, sono linearmente dipendenti. Infatti supponiamo che sia:* $x(1,1) + y(0,2) + z(-1,1) = (0,0)$*. Sviluppando i calcoli si ha il seguente sistema:*

$$\begin{cases} x - z = 0\,, \\ x + 2y + z = 0\,. \end{cases}$$

Questo sistema omogeneo ha, oltre la soluzione nulla, infinite soluzioni non banali, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi la combinazione lineare con tali coefficienti non nulli è ancora $(0, 0)$.

Esempio 5.3.8 *Le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *sono linearmente indipendenti. Infatti, siano* λ , μ *e* ν *i coefficienti di una combinazione lineare di* A, B *e* C *che dà la matrice nulla* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Sviluppando i conti, si ottiene il seguente sistema:*

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \, , \\ 2\lambda - \mu + \nu = 0 \, , \\ \mu - \nu = 0 \, . \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono i coefficienti di tutte le possibili combinazioni lineari delle tre matrici date che danno la matrice nulla. La matrice dei coefficienti di questo sistema è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

$\det(M) = 2$, *quindi per il teorema di Cramer la sua unica soluzione è quella banale. Si può perciò concludere che l'unica combinazione lineare di* A, B, C *che dà la matrice nulla è quella con i coefficienti tutti nulli. Le tre matrici sono dunque linearmente indipendenti.*

Osservazione 5.3.9 *La nozione di vettori linearmente indipendenti ci permette di rispondere al quesito posto più sopra. Supponiamo che il vettore* v *sia combinazione lineare dei vettori* $v_1, \dots, v_n$ *con coefficienti* λ_i, *cioè* $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. *Supponiamo anche che esistano degli altri coefficienti* μ_i *tali che ugualmente si abbia* $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. *Allora abbiamo che:*

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) - (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) = v - v = 0_V \, .$$

Raccogliendo i termini del primo membro, si ha:

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0_V .$$

Questa è una combinazione lineare dei vettori v_i che dà lo zero di V. Dunque, se i vettori v_i sono linearmente indipendenti, tutti i coefficienti della combinazione debbono essere nulli; ciò implica che, per ciascun indice i, $\lambda_i = \mu_i$ e quindi vi è la unicità dei coefficienti della combinazione dei vettori v_i che esprime v.

Viceversa, se i vettori v_i fossero linearmente dipendenti, per definizione, esisterebbero dei coefficienti non tutti nulli ν_i tali che si abbia: $\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n = 0_V$. Se $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, allora si ha:

$$v = v + 0_V = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \nu_1 v_1 + \cdots + \nu_n v_n = (\lambda_1 + \nu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \nu_n)v_n .$$

Quindi anche la combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ con coefficienti $k_i = \lambda_i + \nu_i$ esprime il vettore v; ma, poiché i ν_i non sono tutti nulli, qualcuno dei k_i sarà diverso dal corrispondente λ_i. In definitiva, due diverse combinazioni lineari dei vettori v_i danno lo stesso vettore v.

Osservazione 5.3.10 *Un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è linearmente indipendente.*

Proposizione 5.3.11 *Dei vettori $v_1, \ldots, v_n$, sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può scriversi come combinazione lineare degli altri.*

Dim. Poiché i vettori dati sono linearmente dipendenti, esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà lo zero di V. Sia $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$, con uno dei $\lambda_i \neq 0$, e.g. $\lambda_1 \neq 0$.

Allora, dividendo i membri dell'uguaglianza per $-\lambda_1$ e sommando poi v_1, si ottiene:

$$v_1 = \frac{\lambda_2}{-\lambda_1} v_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_1} v_n .$$

Viceversa, se $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, allora $v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n = 0_V$, che è una combinazione lineare che dà lo zero e avente i coefficienti non tutti nulli, essendo il primo coefficiente 1. □

Corollario 5.3.12 *Siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. Dato $v \in V$, si ha che $v_1, \ldots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se v non è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.*

5.4 Basi e dimensione di uno spazio vettoriale

Definizione 5.4.1 *Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V è una* base *per V, se $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti.*

Esempio 5.4.2 *I vettori $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$ e $(1,0,0)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$. Verifichiamo che sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare che dia lo zero di $\mathbb{R}^3$. Cioè: $x(1,1,1)+y(1,-1,1)+z(1,0,0)=(0,0,0)$; questa, una volta eseguite le operazioni e uguagliate le componenti dei vettori, è equivalente al sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x+y+z=0\,, \\ x-y=0\,, \\ x=0\,. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Il suo determinante è 1, perciò il sistema ha, come unica soluzione, la soluzione banale; quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Dimostriamo che essi sono anche dei generatori. Sia (a,b,c) un generico elemento di $\mathbb{R}^3$. I coefficienti di una combinazione lineare dei vettori $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$ e $(1,0,0)$ che dia (a,b,c) sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=a\,, \\ x-y=b\,, \\ x=c\,. \end{cases}$$

Per il teorema di Cramer, esso è sempre risolubile e dunque, qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^3$ è esprimibile come combinazione lineare dei tre vettori dati.

Osservazione 5.4.3 *Il procedimento precedente può essere generalizzato nel modo seguente:*

dati k vettori di $\mathbb{R}^n$, sia M la matrice ottenuta scrivendo sulla i-esima colonna le coordinate dello i-esimo vettore. M risulta così essere una matrice $n \times k$. I vettori dati sono linearmente indipendenti se e solo se M ha rango

esattamente k. *Infatti, i coefficienti di una combinazione lineare dei vettori dati che dia lo zero sono le soluzioni del sistema omogeneo avente come matrice dei coefficienti proprio la matrice M. Per il teorema di Rouché-Capelli, l'unica soluzione di tale sistema è quella nulla se e solo se M ha rango k.*

Esempio 5.4.4 *L'insieme dei monomi $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ è una base dello spazio dei polinomi con coefficienti reali $\mathbb{R}[x]$. Infatti ogni polinomio, per definizione, si scrive come combinazione lineare di un sottoinsieme finito opportuno di tale insieme. Inoltre è ovvio verificare la indipendenza lineare. Una combinazione lineare degli x^n è il polinomio nullo se e solo se tutti i coefficienti sono nulli.*

Esempio 5.4.5 *Il numero reale* 1 *è una base per $\mathbb{R}$, inteso come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.*

In generale, uno spazio vettoriale può avere più di una base, come mostra l'esempio di $\mathbb{R}^3$, che ammette come basi, come visto in precedenza, i vettori $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$, ma anche, come è facile verificare, l'insieme dei vettori

$$e_1 = (1,0,0)\,, \quad e_2 = (0,1,0)\,, \quad e_3 = (0,0,1)\,,$$

detta *base canonica* di $\mathbb{R}^3$.

Più complicato è stabilire se uno spazio vettoriale abbia una base ed inoltre sarebbe interessante stabilire quale relazione intercorre tre due diverse basi di uno stesso spazio vettoriale. Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, dà una risposta a questi interrogativi.

Teorema 5.4.6 *Ogni spazio vettoriale ammette almeno una base e due diverse basi di uno stesso spazio vettoriale sono equipotenti.*

Definizione 5.4.7 *Si dice* dimensione *di uno spazio vettoriale il numero di elementi di una sua base. In particolare, uno spazio vettoriale è detto di* dimensione finita *se una sua base ha un numero finito di elementi.*

Lo spazio vettoriale {0} ha dimensione zero.

La precedente definizione è ben posta in virtù del teorema 5.4.6. Ad esempio, $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 perché abbiamo trovato una base con tre elementi.

Osservazione 5.4.8 *1) In generale, $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n. Infatti, in analogia con l'Esempio 5.4.2, i vettori $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, che hanno tutte le coordinate nulle tranne la i-esima, che invece vale* 1*, costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$ che ha esattamente n elementi.*
2) Lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, invece, ha dimensione infinita. Infatti la sua base indicata nell'Esempio 5.4.4 ha infiniti elementi.
3) Lo spazio $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ha dimensione nm. Una sua base è data dalle matrici E_{ij}, le matrici che hanno 1 *al posto (i, j) e* 0 *altrove.*

In particolare, lo spazio $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n ha dimensione n^2.

Osservazione 5.4.9 *La dimensione di uno spazio vettoriale dipende anche dal campo base. Ad esempio l'insieme dei numeri complessi ha dimensione* 1 *se viene considerato come spazio vettoriale complesso, mentre ha dimensione* 2 *come spazio vettoriale sui numeri reali (una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale è l'insieme $\{1, i\}$).*

Proposizione 5.4.10 *Un sottoinsieme $\{b_1, \ldots, b_n\}$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, costituisce una base per V se e solo se ogni elemento v di V si può scrivere,* in modo unico*, come combinazione lineare dei vettori della base b_i.*

Dim. Supponiamo che $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sia una base di V. Poiché sono dei generatori, per definizione, ogni vettore v di V si può scrivere come loro combinazione lineare. Inoltre, poiché sono linearmente indipendenti, i coefficienti della combinazione lineare dei b_i che esprime ciascun v sono, per quanto visto nell'Osservazione 5.3.9, unici.

Viceversa, se ogni vettore v può essere scritto come combinazione lineare dei $b_1, \ldots, b_n$, essi sono, per definizione, dei generatori di V. Inoltre, siccome per ipotesi l'unica combinazione dei b_i che dà lo zero è quella con i coefficienti tutti nulli, essi sono anche linearmente indipendenti. Pertanto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ è una base di V. □

Teorema 5.4.11 (Completamento ad una base) *Sia dato uno spazio V di dimensione finita. Se $v_1, \ldots, v_h$ sono dei vettori di V linearmente indipendenti, allora esistono dei vettori $w_1, \ldots, w_k$ tali che $\{v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_k\}$ sia una base di V.*

I vettori $w_1, \ldots, w_k$ si possono prendere appartenenti ad un insieme assegnato di generatori di V.

Dim. Dimostriamolo per induzione su h. Se $h = 0$, basta prendere come completamento una base qualsiasi di V. Supponiamo che l'enunciato sia vero per h; proviamo che vale per $h+1$. Siano $v_1, \ldots, v_{h+1}$ dei vettori indipendenti di V e siano allora $w_1, \ldots, w_k$ i vettori che completano $v_1, \ldots, v_h$ ad una base di V, che esistono per ipotesi induttiva. (Infatti, per l'Osservazione 5.3.10, $v_1, \ldots, v_h$ sono anche essi indipendenti). Allora v_{h+1} si può scrivere come combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_k$. Scriviamo:

$$v_{h+1} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_h v_h + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_k w_k \,. \tag{5.2}$$

Almeno uno dei μ_i è diverso da zero, altrimenti v_{h+1} si scriverebbe come combinazione dei soli $v_1, \ldots, v_h$ e risulterebbero perciò i vettori $v_1, \ldots, v_{h+1}$ linearmente dipendenti. Per comodità, supponiamo che $\mu_k \neq 0$. Sottraendo da entrambi i membri v_{h+1}, dividendo per $-\mu_k$ ed infine sommando w_k, alla fine si perviene alla seguente scrittura:

$$w_k = k_1 v_1 + \cdots + k_{h+1} v_{h+1} + \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_{k-1} w_{k-1} \,. \tag{5.3}$$

Ovverosia, w_k si scrive come combinazione di $v_1, \ldots, v_{h+1}$ e $w_1, \ldots, w_{k-1}$. Dimostriamo che $\{v_1, \ldots, v_{h+1}, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ è una base di V e abbiamo finito.
1) $\{v_1, \ldots, v_{h+1}, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ sono dei generatori di V.
Infatti, sia $v \in V$; $v = t_1 v_1 + \cdots + t_h v_h + s_1 w_1 + \cdots + s_k w_k$, perché, ricordiamo, $v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_k$ sono una base di V. Ma allora, sostituendo in questa espressione a w_k la combinazione (5.3), si ha:

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_h v_h + s_1 w_1 + \cdots + s_k (k_1 v_1 + \cdots + k_{h+1} v_{h+1} + \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_{k-1} w_{k-1}).$$

Quindi ogni v si scrive come combinazione dei $v_1, \ldots, v_{h+1}, w_1, \ldots, w_{k-1}$.
2) $\{v_1, \ldots, v_{h+1}, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo, per assurdo, che: $0_V = a_1 v_1 + \cdots + a_{h+1} v_{h+1} + b_1 w_1 + \cdots + b_{k-1} w_{k-1}$, ma i coefficienti a_i e b_i non siano tutti nulli. In particolare, non sarà nullo a_{h+1}, il coefficiente di v_{h+1}, perché, se lo fosse, sarebbero nulli anche tutti gli altri, in quanto $v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_{k-1}$ sono linearmente indipendenti. Sostituendo in questa espressione, la combinazione (5.2) qui sopra, si ha:

$$0_V = a_1 v_1 + \cdots + a_{h+1} (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_h v_h + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_k w_k) + b_1 w_1 + \cdots + b_{k-1} w_{k-1} \,.$$

Questa è una combinazione dei $v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_k$ che dà lo zero. Il coefficiente di w_k è $a_{h+1}\mu_k$ che è non nullo perché entrambi i fattori sono diversi da zero. Ciò è assurdo perché $v_1, \ldots, v_h, w_1, \ldots, w_k$ costituiscono una base di V e perciò sono linearmente indipendenti. □

Questo teorema ha molte conseguenze, utili da adoperare nelle applicazioni. Facciamone una lista. Di alcune proprietà daremo una dimostrazione; dimostrare le altre viene lasciato come esercizio teorico.

Teorema 5.4.12 *Da un insieme finito di generatori dello spazio vettoriale V si può sempre estrarre una base di V, cioè un sottinsieme che sia una base di V.*

Teorema 5.4.13 *Sia V uno spazio vettoriale V di dimensione n. Dati n vettori di V, essi sono lineamente indipendenti se e solo se sono un insieme di generatori di V.*

Corollario 5.4.14 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se W è un sottospazio vettoriale di V tale che $\dim V = \dim W = n$, allora $V = W$.*

5.5 Coordinate

Sia $\mathcal{B}$ una base dello spazio vettoriale V, di dimensione n. Ordiniamola, di modo che sia ben specificato quale sia il primo elemento, il secondo e così via.

Definizione 5.5.1 *Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ordinata dello spazio vettoriale V. Si definiscono* coordinate *del vettore $v \in V$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la n-upla di scalari $(x_1, \ldots, x_n)$ tali che $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$.*

Facciamo varî commenti.

In primo luogo questa definizione è ben posta: ad ogni $v \in V$ risulta assegnata in modo univoco la n-upla delle sue coordinate rispetto ad una base. Infatti, in virtù della Proposizione 5.4.10, esiste sempre una combinazione lineare di elementi della base data che esprime v e i coefficienti di tale combinazione sono unici.

In secondo luogo, le coordinate di un vettore dipendono strettamente, come è ovvio, dalla base scelta e anche dall'ordine con cui vengono considerati gli elementi della base. Più sotto vedremo in estremo dettaglio le regole di questa dipendenza. Ad ogni modo, qualunque sia la base, *lo zero di V avrà sempre come coordinate la n-upla* $(0, \ldots, 0)$. Poiché possiamo scrivere $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n$ ed inoltre tale scrittura per esprimere b_1 come combinazione dei b_i è unica, le coordinate di b_1, nella base $\{b_1, \ldots, b_n\}$, sono $(1, 0, \ldots, 0)$. Più in generale, l'i-esimo vettore della base, b_i, ha coordinate

$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, la n-upla che ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima, che vale 1.

Osservazione 5.5.2 *Dalla definizione precedente è immediato dedurre che le coordinate della somma di due vettori v e w sono la somma, componente per componente, delle coordinate rispettive di v e w e che le coordinate di λv sono le coordinate di v moltiplicate per λ.*

Poniamoci dunque la questione fondamentale: supponiamo di conoscere le coordinate di un vettore v in una data base $\mathcal{B}$. Quali saranno le coordinate di v in un'altra base $\mathcal{B}'$? Per rispondere, consideriamo alcune notazioni.
1) $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ verrà indicata come *la vecchia base*; $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ verrà indicata come *la nuova base*;
2) Supponiamo di conoscere, per ogni indice j, con $j = 1, \ldots, n$, i coefficienti delle combinazioni lineari: $b_j = a_{1j}b'_1 + \cdots + a_{nj}b'_n$.

Il termine a_{ij} è il coefficiente di b'_i nella combinazione che esprime il j-esimo elemento b_j della vecchia base. In altri termini, il vettore $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ rappresenta le coordinate del j-esimo vettore della vecchia base rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$.
3) Sia $\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ la matrice (a_{ij}) che ha, cioè, come vettori colonna le n-uple $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ delle coordinate dei vettori della vecchia base rispetto alla nuova base. La matrice viene detta *matrice di cambiamento di base* o anche *matrice di passaggio* dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$; essa è una matrice quadrata di ordine n.

Proposizione 5.5.3 *Conoscendo la matrice $\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ tra due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e le coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di un vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$, le coordinate $(x'_1, \ldots, x'_n)$ di v rispetto alla nuova base si determinano nel modo seguente:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Dim. Dire che le coordinate del vettore v rispetto alla vecchia base $\mathcal{B}$ sono $(x_1, \ldots, x_n)$ significa che $v = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n$. Per come è definita la matrice di passaggio si ha anche che $b_j = a_{1j}b'_1 + \ldots + a_{nj}b'_n$. Effettuando le sostituzioni opportune, si ottiene che:

$$\begin{aligned} v &= x_1(a_{11}b'_1 + \cdots + a_{n1}b'_n) + \cdots + x_n(a_{1n}b'_1 + \cdots + a_{nn}b'_n) = \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})b'_1 + \cdots + (x_1a_{n1} + \cdots + x_na_{nn})b'_n . \end{aligned}$$

Osserviamo che il coefficiente del vettore della nuova base b'_i è il prodotto della i-esima riga della matrice di passaggio e la colonna delle vecchie coordinate di v. $\square$

Esempio 5.5.4 *Consideriamo i tre seguenti vettori in* $\mathbb{R}^3$, $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (0,0,1)$ *e* $b_3 = (-1,0,1)$. *Essi sono una base di* $\mathbb{R}^3$. *Infatti la matrice* A *che ha i tre vettori dati come colonne,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ha determinante non nullo. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e, in virtù del Teorema 5.4.13, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Vogliamo determinare la matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *dalla base canonica* $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *alla base* $\mathcal{B}$. *Per prima cosa determiniamo le nuove coordinate dei vettori della vecchia base. Siano* (a_{11}, a_{21}, a_{31}) *le nuove coordinate del vettore* $(1,0,0)$. *Dovrà essere verificata la seguente uguaglianza tra vettori:* $(1,0,0) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,0,1) + a_{31}(-1,0,1)$. *Quindi* (a_{11}, a_{21}, a_{31}) *sono le soluzioni del seguente sistema lineare non omogeneo (scritto in forma matriciale):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente per gli altri vettori della base canonica. Svolgendo i calcoli si ottiene la matrice di passaggio:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sostanzialmente, la difficoltà risiede tutta nel determinare le nuove coordinate degli elementi della vecchia base.

Osservazione 5.5.5 *Supponiamo di conoscere la matrice di passaggio dalla base* $\mathcal{B}$ *alla base* $\mathcal{B}'$. *Vogliamo ricavare la matrice di passaggio dalla base* $\mathcal{B}'$ *alla base* $\mathcal{B}$, *cioè la matrice* $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. *Per come abbiamo definito le cose, se* $(x_1, \ldots, x_n)$ *sono le coordinate di un vettore* v *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *e*

$(x'_1, \ldots, x'_n)$ le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$, valgono le due seguenti uguaglianze:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

In definitiva, per ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ deve valere:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ma questo implica che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$, dove I_n è la matrice identità di ordine n. Quindi, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è la matrice inversa di *$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. In particolare,* le matrici di passaggio sono matrici invertibili.

Esempio 5.5.6 *Consideriamo lo spazio $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione 4 e le quattro matrici A_1, A_2, A_3, A_4:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

costituiscono una sua base.
In questa base, la generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha coordinate (a, b, c, d).

Consideriamo ora il sottospazio vettoriale $\mathcal{S}$ di $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}.$$

Si può verificare (esercizio) che $\dim \mathcal{S} = 3$ e che una sua base è data dalle tre matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Completiamola ad una base di $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ *aggiungendo la matrice*

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e consideriamo la base ordinata $A_1, \Sigma_1, \Sigma_2, A_4$.

Chiaramente, le nuove coordinate di A_1 *e di* A_4 *coincidono con le vecchie e sono, rispettivamente,* $(1,0,0,0)$ *e* $(0,0,0,1)$. *Osserviamo che:*

$$A_2 = \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{2}\Sigma_2 \quad e \quad A_3 = \frac{1}{2}\Sigma_1 - \frac{1}{2}\Sigma_2\,.$$

Quindi le nuove coordinate di A_2 *e di* A_3 *sono, rispettivamente :* $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ *e* $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

A questo punto è facile costruire la matrice di passaggio; basta scrivere la matrice che abbia come colonne le nuove coordinate di A_1, A_2, A_3, A_4:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questa nuova base, la generica matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ha coordinate*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ d \end{pmatrix}.$$

5.6 Somma e somma diretta di sottospazi vettoriali

Proposizione 5.6.1 *Siano* V *e* W *due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale* U. *Allora* $V \cap W$ *è anch'esso un sottospazio vettoriale di* U.

Dim. Dobbiamo dimostrare che $V \cap W$ verifica le condizioni a) e b) della Definizione 5.2.1, sapendo che sia V che W le verificano. Siano $x, y \in V \cap W$. Gli elementi $x + y$, λx appartengono a V perché V è un sottospazio; per lo stesso motivo, $x+y, \lambda x \in W$. Allora sia $x+y$ che λx appartengono a $V \cap W$.

$\square$

In particolare l'intersezione tra due sottospazi vettoriali non è mai vuota. Essa contiene almeno lo zero.

Dati due sottospazi V e W di uno stesso spazio vettoriale U, l'unione $V \cup W$ non è, in generale, un sottospazio vettoriale.

Prendiamo come esempio

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\} \text{ e } Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\}\,.$$

I vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ appartengono a $X \cup Y$ ma la loro somma $(1,1)$ no. Dunque $X \cup Y$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

È possibile però costruire a partire da V e W un altro sottospazio di U nel modo che segue:

Definizione 5.6.2 *Si dice* somma dei sottospazi *V e W di U il sottospazio*

$$V + W = \{x \in U \,|\, x = v + w, v \in V \text{ e } w \in W\}\,.$$

Questo è l'insieme di tutti i vettori di U che possono essere scritti come somma di un elemento di V più un elemento di W.

Possiamo dimostrare che:
1) l'insieme $V + W$ è effettivamente un sottospazio vettoriale di U;
2) $V + W$ contiene come sottospazi sia V che W;
3) $V + W$ e *il più piccolo sottospazio* di U che contenga sia V che W. Ovverosia, se X è un sottospazio di U tale che $V \subset X$ e $W \subset X$, allora necessariamente $V + W \subset X$.

La dimostrazione di questi fatti viene lasciata per esercizio.

Abbiamo visto, dalla definizione, che ogni elemento di $V + W$ si scrive come somma di un elemento di V con un elemento di W. In simboli:

$$x \in V + W \;\Leftrightarrow\; \exists v \in V \text{ e } \exists w \in W \text{ tali che } x = v + w\,.$$

Gli elementi v e w sono univocamente determinati da x oppure possono esistere $v' \in V$ e $w' \in W$ rispettivamente diversi da v e w ma tali che ugualmente si abbia $x = v' + w'$?

Proposizione 5.6.3 *Sia x un elemento di $V + W$. Esiste un unico $v \in V$ ed un unico $w \in W$ tali che $x = v + w$ se e solo se $V \cap W = \{0\}$.*

Dim. Supponiamo che esista $z \in V \cap W, z \neq 0$. Allora si ha: $x = v + w = (v+z)+(w-z)$. Anche $v+z \in V$ e $v+z \neq v$. Analogamente per w e $w-z$.

Viceversa sia $x = v + w = v' + w'$ e $v - v' \neq 0$. Allora $v + w - v' - w' = 0$, cioè $v - v' = w' - w$, per cui $v - v' \in W$. In conclusione $v - v' \in V \cap W$ e $v - v' \neq 0$. □